ÉCOLE POLYTECHNIQUE

CONCOURS D'ADMISSION 2005 **FILIÈRES PSI et PT**

ÉPREUVE D'INFORMATIQUE

(Durée : 2 heures)

L'utilisation des calculatrices **n'est pas autorisée** pour cette épreuve.
Le langage de programmation choisi par le candidat doit être spécifié en tête de la copie.

⋆ ⋆ ⋆

Dépouillement d'élections

On attachera une grande importance à la concision, à la clarté, et à la précision de la rédaction. On précisera en tête de copie le langage de programmation utilisé.

Le temps d'exécution $T(f)$ d'une fonction f est le nombre d'opérations élémentaires (addition, soustraction, multiplication, division, affectation, etc.) nécessaire au calcul de f. Lorsque ce temps d'exécution dépend d'un paramètre n, il sera noté $T_n(f)$. On dit que la fonction f s'exécute :

- en temps linéraire en n, s'il existe $K > 0$ tel que pour tout n, $T_n(f) \leq Kn$;
- en temps quadratique en n, s'il existe $K > 0$ tel que pour tout n, $T_n(f) \leq Kn^2$.

Le problème consiste à faire le décompte du résultat des élections dans le pays X. La règle électorale y est très laxiste, puisqu'on peut être élu sans s'être présenté. Plus prosaïquement, chaque votant i ($0 \leq i < n$) vote pour $a[i]$, où $a[i]$ est un entier positif quelconque (les habitants du pays X sont identifiés par un entier représentant leur numéro de sécurité sociale).

I. Dépouillement du premier tour

Dans le pays X, seul le candidat ayant obtenu strictement plus de 50% des voix exprimées est élu au premier tour des élections.

Question 1 Écrire la fonction `gagnant_tour1` qui retourne le gagnant du premier tour s'il existe. S'il n'existe pas, on retournera -1. On se contentera d'une fonction faisant le calcul en temps quadratique par rapport à n.

Question 2 Supposons le tableau a trié en ordre croissant, vérifiant $a[0] \leq a[1] \leq \cdots \leq a[n-1]$. Écrire une fonction `gagnant_tour1_bis` qui retourne le gagnant du premier tour en temps linéaire par rapport à n.

Question 3 Si on sait trier un tableau de taille n en temps $n \log n$, quel est l'ordre de grandeur du temps pris par le dépouillement du premier tour ?

II. Dépouillement du deuxième tour

Au deuxième tour des élections, le candidat ayant obtenu le plus de voix est élu. Si égalité de voix, tous les candidats ayant obtenu le plus de voix sont élus (ex aequo).

Question 4 Écrire la fonction `gagnants_tour2` qui imprime le(s) gagnant(s) du deuxième tour. On se contentera d'une fonction faisant le calcul en temps quadratique par rapport à n (attention : on n'imprimera qu'une seule fois les noms des gagnants).

Question 5 On suppose maintenant le tableau a trié en ordre croissant. Écrire une fonction `gagnants_tour2_bis` qui imprime le(s) gagnant(s) du deuxième tour en temps linéaire par rapport à n.

Question 6 Si on sait trier un tableau de taille n en temps $n \log n$, quel est l'ordre de grandeur du temps pris par le dépouillement du deuxième tour ?

III. Dépouillement rapide du premier tour

On suppose à nouveau le tableau a non trié.

Un multi-ensemble E d'éléments de D est un ensemble où on autorise chaque élément à apparaître plusieurs fois (formellement, E est une fonction de D dans $\mathbf{N}$ où $E(d)$ est le nombre d'occurrences de d dans E). Par exemple, $\langle 0, 2, 2, 3, 0, 0, 0, 5, 0 \rangle$ est un multi-ensemble. On dit que x est un élément majoritaire dans E contenant n éléments si x apparaît strictement plus que $n/2$ fois dans E. Le gagnant du premier tour est donc l'élément majoritaire (s'il existe) dans le multi-ensemble $\langle a[0], a[1], \ldots a[n-1] \rangle$. Dans ce dernier cas, on dira plus simplement que x est majoritaire dans le tableau a.

Question 7 Démontrer que si x est majoritaire dans E et que y et z sont deux éléments distincts ($y \neq z$) de E, alors x est majoritaire dans le multi-ensemble obtenu en retirant de E les éléments y et z.

Question 8 Démontrer que si x est majoritaire dans a et qu'il n'existe pas d'élément majoritaire dans les i premiers éléments $\langle a[0], a[1], \ldots a[i-1] \rangle$ de a, alors x est majoritaire dans $\langle a[i], a[i+1], \ldots a[n-1] \rangle$.

Question 9 En déduire la fonction `gagnant_tour1_ter` qui retourne le gagnant du premier tour en temps linéaire par rapport à n.
Indication : faire deux passes sur le tableau a ; dans la première passe, on cherche un candidat majoritaire ; dans la deuxième passe, on vérifie qu'il est bien majoritaire.

* *
*